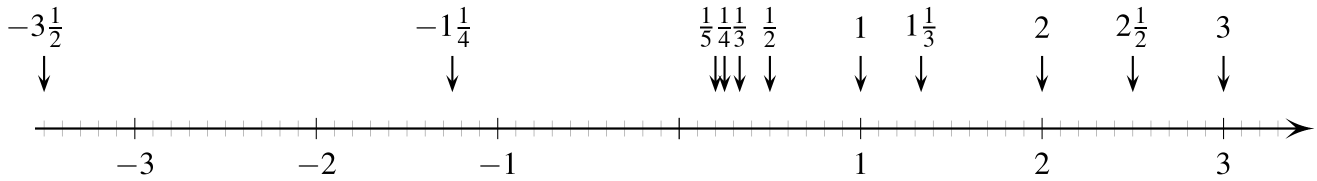
Mathematik

Ein (gemeiner) Bruch hat einen Bruchstrich, darüber steht der Zähler, darunter der Nenner, wobei beides ganze Zahlen sind. Eine Bruchzahl hat viele Darstellungen: $\frac{7}{5} = 14/10 = 21 : 15 = 1\frac{2}{5} = 1{,}4 = 140\%$.
Beispiele: a) gemeiner Bruch: $\frac{5}{7}$ ← Zähler ← Bruchstrich ← Nenner, b) gemischter Bruch: $1\frac{1}{3}$, c) Dezimalbruch: $0{,}\overline{3}$.
Damit das Endergebnis eindeutig wird, vereinbart man, den Bruch soweit es geht zu kürzen (vgl. ❶), bei einem Nenner von 1 nur den Zähler hinzuschreiben und bei einem Bruch > 1 ggf. einen gemischten Bruch zu schreiben (**Vorsicht**: Dieser eignet sich nicht zum Weiterrechnen, sollte also eher gemieden werden!), wobei der Bruch-Anteil < 1 sein muss. Zudem hat ein Bruch genau ein Vorzeichen, das vor den Bruchstrich geschrieben wird (siehe ❼).
Der Bruch ist eine geordnete Darstellung der Multiplikation(en) und Division(en) ganzer Zahlen. Alle als Brüche darstellbaren Zahlen heißen rationale Zahlen – diese Menge wird durch $\mathbb{Q}$ symbolisiert.

Beispiel Zahlenstrahl:



❶ Brüche **kürzen** – dabei bleibt der Wert erhalten:
Hierbei teilst Du einfach Zähler und Nenner mit derselben ganzen Zahl, wobei Zähler und Nenner ebenfalls ganze Zahlen bleiben müssen. Vorteil: die Zahlen werden kleiner – Rechnen oder Finden eines gemeinsamen Nenners werden somit leichter.
Beispiele: a) $\frac{3}{12} = \frac{3:3}{12:3} = \frac{1\cdot\cancel{3}}{4\cdot\cancel{3}} = \frac{1}{4}$; b) $\frac{15}{3} = \frac{5}{1} = 5$; c) $\frac{4}{8}\left(=\frac{2}{4}\right) = \frac{1}{2}$; d) $\frac{7}{13}$ (ist gekürzt); e) $\frac{85}{119} \overset{(:17)}{=} \frac{5}{7}$.
Merke: Ist das Ergebnis ein Bruch, ist dieser so weit wie möglich zu kürzen [sonst nur unvollständige Lösung]!
Aufgaben: a) $\frac{3}{6}$; b) $\frac{15}{35}$; c) $\frac{8}{20}$; d) $\frac{13}{26}$; e) $\frac{36}{72}$; f) $\frac{8}{64}$; g) $1\frac{6}{8}$ (siehe ❹).

❷ Brüche **erweitern** – dabei bleibt der Wert erhalten:
Ähnlich wie Kürzen, nur das hier mit derselben ganzen Zahl multipliziert wird (Einsatz: gemeinsamer Nenner).
Beispiele: a) $\frac{3}{4} = \frac{3\cdot5}{4\cdot5} = \frac{15}{20}$; b) $\frac{4}{5} = \frac{4\cdot7}{5\cdot7} = \frac{28}{35}$.
Aufgaben (erweitere mit 3 [4, 5, 6, 7]): a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{3}{5}$; c) $\frac{5}{9}$; d) $\frac{4}{13}$; e) $\frac{5}{7}$.

❸ Brüche **vergleichen** ['<', '>', '=']:
Um Brüche vergleichen zu können, müssen diese zunächst gleichnamig sein, d.h. man bringt sie durch Kürzen (siehe ❶) oder Erweitern (siehe ❷) auf den gleichen (kleinsten gemeinsamen) Nenner. Hiernach kann man einfach die Zähler (diesen werden die Vorzeichen zugeordnet) vergleichen (Position auf dem Zahlenstrahl, siehe oben).
Beispiel: a) $\frac{5}{9} < \frac{7}{9}$; b) $-\frac{3}{4} = -\frac{3\cdot5}{4\cdot5} = \frac{-15}{20} > \frac{-16}{20} = -\frac{4\cdot4}{5\cdot4} = -\frac{4}{5}$; c) $\frac{6}{13} = \frac{6\cdot7}{13\cdot7} = \frac{42}{91}$.
Aufgaben (ergänze '<', '=' oder '>'): a) $\frac{2}{13} \square \frac{4}{13}$; b) $\frac{1}{3} \square \frac{3}{6}$; c) $\frac{1}{3} \square \frac{2}{7}$; d) $\frac{4}{5} \square \frac{8}{10}$; e) $\frac{1}{9} \square \frac{9}{81}$.

❹ Brüche **addieren** ['+'] / **subtrahieren** ['−']:
Hierbei suchst Du zuerst den kleinsten gemeinsamen Nenner (siehe ❸), danach kannst Du die Zähler addieren/subtrahieren und den Nenner beibehalten – bei gemischten Brüchen erst 'ganze Zahlen'-Teil, dann 'gemeiner Bruch'-Teil addieren/subtrahieren.
Beispiele: a) $\frac{5}{7} + \frac{1}{7} = \frac{5+1}{7} = \frac{6}{7}$; b) $\frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{10}{15} - \frac{3}{15} = \frac{10-3}{15} = \frac{7}{15}$; c) $2 + \frac{2}{9} = 2\frac{2}{9}\ \left(= \frac{18+2}{9} = \frac{20}{9}\right)$;
d) $\underline{1}\frac{1}{3} + \underline{3}\frac{3}{4} = \underline{1+3} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \underline{4} + \frac{4+9}{12} = 4\frac{13}{12} = 4\frac{12+1}{12} = 5\frac{1}{12}$;
e) $\underline{23}\frac{2}{5} - \underline{11}\frac{3}{5} = \underline{23-11} + \frac{2}{5} - \frac{3}{5} = \underline{12} + \frac{2-3}{5} = 12 - \frac{1}{5} = 11 + \frac{5-1}{5} = 11\frac{4}{5}$.

Aufgaben: a) $\frac{2}{14} + \frac{5}{14}$; b) $\frac{3}{4} + \frac{1}{8}$; c) $\frac{1}{3} + \frac{1}{7}$; d) $\frac{1}{5} + \frac{3}{11}$; e) $\frac{19}{22} - \frac{1}{22}$; f) $\frac{7}{12} - \frac{2}{3}$; g) $3\frac{1}{5} + 1\frac{3}{8}$.

❺ Brüche **multiplizieren** [‘$\cdot$’ bzw. ‘$\times$’]:

Hierbei multiplizierst Du einfach Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner – mit möglichst frühem Kürzen (siehe ❶). Gemischte Brüche müssen hierbei immer zuerst in gewöhnliche Brüche umgewandelt werden.

Beispiele: a) $3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 5} = \frac{6}{5}$; b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot 5} = \frac{2}{5}$; c) $\frac{3}{7} \cdot 9\frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 49}{7 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 7}{1 \cdot 5} = \frac{21}{5}\left(= 4\frac{1}{5}\right)$.

Aufgaben: a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9}$; b) $\frac{14}{15} \cdot \frac{10}{21}$; c) $\frac{5}{9} \cdot \frac{3}{7}$; d) $\frac{13}{25} \cdot \frac{15}{39}$; e) $\frac{35}{81} \cdot \frac{45}{49}$; f) $2\frac{4}{7} \cdot \frac{14}{15}$; g) $\frac{13}{14} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{35}{39}$.

❻ Brüche **dividieren** [‘:’ bzw. ‘/’]:

Hierbei multiplizierst Du einfach mit dem Kehrwert des Bruchs, durch den Du dividieren sollst.
Du erhälst den Kehrwert eines Bruches, wenn Du Zähler und Nenner einfach vertauschst – so ist $\frac{3}{5}$ der Kehrwert von $\frac{5}{3}$ oder $2\frac{1}{7} = \frac{15}{7}$ der Kehrwert von $\frac{7}{15}$ [mache Dir an Hand des zuvor abgebildeten Zahlenstrahls den Zusammenhang von Bruch und Kehrwert für 1, 2 und 3 deutlich].
Z.B. erhält man beim Halbieren von $\frac{1}{4}$ Kuchen genau $\frac{1}{4} : 2 = \frac{1}{4} : \frac{2}{1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{8}$ Kuchen, wie man sich leicht klarmachen kann.

Weitere Beispiele: a) $\frac{3}{4} : 3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 3} = \frac{1}{4}$; b) $\frac{7}{8} : \frac{5}{16} = \frac{7 \cdot 16}{8 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 2}{1 \cdot 5} = \frac{14}{5}\left(= 2\frac{4}{5}\right)$;
c) $6\frac{3}{5} : \frac{11}{3} = \frac{33 \cdot 3}{5 \cdot 11} = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 1} = \frac{9}{5}\left(= 1\frac{4}{5}\right)$; d) $2\frac{1}{2} : 1\frac{1}{3} = \frac{5}{2} : \frac{4}{3} = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{15}{8}\left(= \frac{8+7}{8} = 1\frac{7}{8}\right)$.

Aufgaben: a) $\frac{6}{7} : 3$; b) $5\frac{2}{3} : 5$; c) $\frac{3}{5} : \frac{10}{7}$; d) $72 : \frac{8}{11}$; e) $\frac{4}{7} : \frac{16}{21}$; f) $2\frac{5}{15} : \frac{3}{7}$; g) $\frac{11}{5} : \frac{5}{6}$; h) $\frac{7}{9} : \frac{14}{27}$.

❼ Behandlung von **Vorzeichen** [‘+’, ‘−’]:

Dieser Punkt ist nur zur Klärung separat und wird auch erst später genau besprochen – hier wird er der Vollständigkeit halber aufgeführt:
Bei Addition und Subtraktion (d.h. ❹) bleibt alles wie zuvor besprochen:
direkt aufeinander folgende Zeichen (d.h. Operationszeichen und Vorzeichen) werden wie folgt zusammengefasst: ‘$--$’ $=$ ‘$+$’, ‘$++$’ $=$ ‘$+$’, ‘$-+$’ $=$ ‘$-$’, ‘$+-$’ $=$ ‘$-$’.
Diese Regel gilt auch für Multiplikation und Division: hier müssen die Zeichen nicht direkt aufeinander folgen, sondern werden beliebig gepaart (somit liefert eine gerade Anzahl von ‘−’-Zeichen ein positives Ergebnis [‘+’], eine ungerade Anzahl von ‘−’-Zeichen aber ein negatives Ergebnis [‘−’]; vgl. ❺+❻).

Beispiele: a) $-\frac{1}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{-1-(-2)}{3} = \frac{1}{3}$; b) $-\frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{7}{15}$; c) $\frac{-3}{13} = \frac{3}{-13} = -\frac{3}{13}$; d) $\frac{-7}{-19} = \frac{7}{19}$.

Merke: Generell wird das Vorzeichen nur vor den Bruch geschrieben – die Darstellung wird eindeutig.

Aufgaben: a) $-\frac{6}{-66}$; b) $-\frac{2}{5} - \frac{3}{10}$; c) $\frac{3}{7} - \frac{-5}{14}$; d) $-\frac{4}{7} + 3$; e) $-\frac{2}{3} \cdot \frac{-3}{5}$; f) $\frac{2}{3} : \frac{-7}{3}$; g) $-\frac{-1}{-6} : \left(-\frac{-7}{-6}\right)$.

➲ **Strategien**:

➢ Vorteilhaftes Rechnen – hier z.B. möglichst frühes Kürzen (vgl. ❶) – erspart Arbeit!

Tipp: Um schnell erkennen zu können, ob ein Bruch gekürzt werden kann, ist die Beherrschung der drei folgenden Regeln empfehlenswert:
① Eine Zahl ist durch **2** teilbar, wenn die letzte Ziffer der Zahl gerade ist (d.h. Element von $\{0,2,4,6,8\}$).
② Eine Zahl ist durch **3** teilbar, wenn die Quersumme (d.h. Summe aller Ziffern der Zahl) durch 3 teilbar ist; man kann so oft die Quersumme aus der vorigen Quersumme ziehen, bis die zuletzt erhaltene Quersumme einstellig ist.
③ Eine Zahl ist durch **5** teilbar, wenn die letzte Ziffer der Zahl entweder ‘5’ oder ‘0’ ist.
Es gibt noch weitere Regeln, die aber nicht beherrscht werden müssen – die geneigte Schülerin möge die folgende Webseite aufrufen: “`https://de.wikipedia.org/wiki/Teilbarkeit`”.

➢ ‘Strichrechnung’ (d.h. Addition [‘+’] und Subtraktion [‘−’]; siehe ❹) benötigt immer einen gemeinsamen Nenner (Hauptnenner).

➢ ‘Punktrechnung’ (d.h. Multiplikation [‘$\cdot$’], vgl. ❺, und Division [‘:’], vgl. ❻) erfolgt als Ordnung der gemeinen Brüche auf einem gemeinsamen Bruchstrich.

➢ Subtraktion entspricht Addition der Gegenzahl (Vorzeichenwechsel).

➢ Division entspricht Multiplikation mit dem Kehrbruch (Zähler und Nenner werden vertauscht; siehe ❻).

Viel Spass und Erfolg beim Nachvollziehen und Rechnen! ☺