

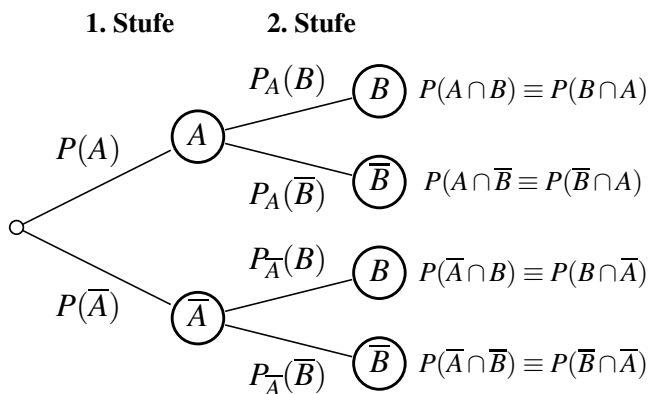
Mathematik

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik II

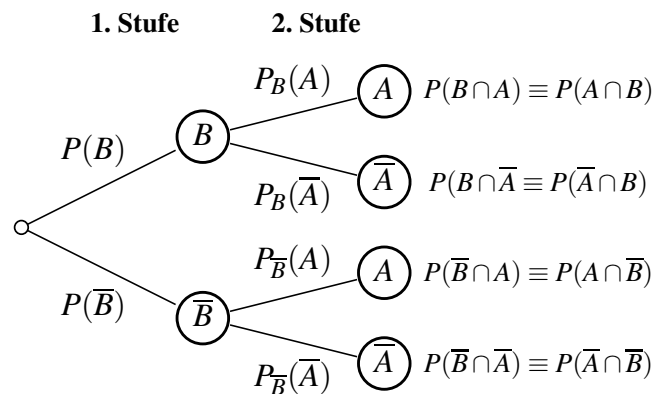
○ Grundlagen aus der Mengenlehre (nicht so bedeutsam – nur zum klareren Gebrauch)

- ⇒ **Schnitt von Mengen:** $A \cap B$: ‘Menge A geschnitten mit Menge B’ bzw. ‘Ereignis A und B’.
Es gilt: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$ (bei stochastisch unabhängigen Ereignissen: $P_A(B) = P(B)$)
→ Pfadwahrscheinlichkeit: Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfads.
 - ⇒ **Vereinigung von Mengen:** $A \cup B$: ‘Menge A vereinigt mit Menge B’ bzw. ‘Ereignis A oder B’.
Es gilt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (bei Ereignissen ohne gemeinsame Elementarereignisse [man sagt dann A und B sind disjunkte Mengen] entfällt der 3. Term – so wie zumeist erwartet)
→ Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses: Summe aller zugehörigen/‘günstigen’ Pfade.
 - ⇒ **Leere Menge:** ‘Kein Element’ bzw. ‘kein Elementarereignis’ bzw. ‘nicht mögliche Ereignisse’.
Es gilt: $P(\emptyset) \equiv P(\{\}) = P(\bar{S}) = 0$.
 - ⇒ **Grundgesamtheit:** In der Stochastik die Menge aller (hier m) Elementarereignisse (und somit aller möglichen Ergebnisse) – d.h. das sichere Ereignis $S \equiv \Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_m\} = \bigcup_{i=1}^m e_i \equiv \bigcup_{i=1}^m \omega_i$.
Es gilt: $P(S) = P(\bar{\emptyset}) = P(e_1 \cup e_2 \dots \cup e_m) = P(e_1) + P(e_2) + \dots + P(e_m) = 1$.
 - ⇒ **Komplement einer Menge:** \bar{A} : ‘Komplement von A’ bzw. Ereignis ‘nicht A’/‘A quer’; der Rest, der der Menge zur Grundgesamtheit fehlt: $\bar{A} = S \setminus A$ – ‘S ohne A’. Es gilt: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- ⇒ FS: 1) Mengen (S. 5 | S. 8 | S. 1), 2) Pfadregeln (S. 37 | S. 51 | S. 40) [gr. Tafelwerk, Cornelsen | FS bis zum Abi, Duden/Paetec | Sieber, Klett].

○ Baumdiagramme/Vierfeldertafel & bedingte Wahrscheinlichkeiten (siehe auch nächster Punkt)



Baumdiagramm 1



Baumdiagramm 2

	B	\bar{B}	Σ
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
\bar{A}	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
Σ	$P(B)$	$P(\bar{B})$	$P(S)$

Vierfeldertafel

$$\begin{aligned}
 P(A \cap B) &= P(B) \cdot P_B(A) = P(A) \cdot P_A(B) \quad \text{[Pfadmultiplikation];} \\
 P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \quad \text{[Pfadaddition Fächer/Knotenregel];} \\
 P(S) &= P(A) + P(\bar{A}) = P(B) + P(\bar{B}) = 1 \quad \text{[sicheres Ereignis]} \\
 &= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B}).
 \end{aligned}$$

Es gibt keine gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten auf den Zweigen der beiden Baumdiagramme; man muss über die Pfadwahrscheinlichkeiten und Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten gehen, d.h. quasi über den Umweg der Vierfeldertafel.

○ Bedingte Wahrscheinlichkeit

- **Bedingte Wahrscheinlichkeit:** Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung A : $P_A(B) \equiv P(B|A)$.
 - Aus dem Multiplikationssatz ('Produktregel'): $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$ ergibt sich die **Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit:** $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ bzw. $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
 - **Bayes-Regel:**
Nimmt man nun auch den Additionssatz ('Summenregel'): $P(B) = P(A) \cdot P_A(B) + P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B)$ zu Hilfe, ergibt sich: $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(A) \cdot P_A(B) + P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B)}$.
 - **Stochastische Unabhängigkeit:**
Zwei Ergebnisse A und B sind stochastisch unabhängig, wenn gilt:
 $P_B(A) = P(A)$ bzw. $P_A(B) = P(B) \iff P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
Im Falle medizinischer Tests mit A 'Patient krank' und B 'Test positiv' (Test zeigt auch krank an; entdeckt den Erreger etc.) bedeutete die Unabhängigkeit von A und B , dass 'Test positiv' nichts mit 'Patient krank' zu tun hat, der Test also Unsinn ist – man kann hier also von Abhängigkeit ausgehen.
- ☞ LB S. 68+71 Nr. 11 [Bedingte Wahrscheinlichkeiten], S. 75 [Stochastische Unabhängigkeit], S. 73f [medizinische Tests] & FS S. 37 [Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten] {Neue Wege: Stochastik, Schroedel & gr. Tafelwerk, Cornelsen; diese Angaben gelten auch für die letzte Zeile}.

○ Definitionen zur Stochastik – 'Kunst des Vermutens'

- ♣ **Zufallsexperiment:** Das nächste (zukünftige) Ergebnis/Elementarereignis ist nicht vorherzusagen – auch nicht durch lange Beobachtung des Experiments (es gibt kein 'Muster').
 - ☐ **Laplace-Experiment:** Alle m Elementarereignisse/möglichen Ergebnisse haben die gleiche Wahrscheinlichkeit: $P = \frac{1}{m}$ [Beispiele (idealisiert): Münze, Würfel, Glücksrad].
 - ☐ **Bernoulli-Experiment:** Es gibt genau zwei Elementarereignisse.
Mit p : Wahrscheinlichkeit 'ausgesuchtes/günstiges Ereignis/Erfolg' und q : Wahrscheinlichkeit anderes Ereignis/'Misserfolg' gilt: $p + q = 1$.
 - Bernoulli-Kette:** 'n-stufig' bei n Wiederholungen mit gleich bleibendem p .
 - ☐ **Relative Häufigkeit & Wahrscheinlichkeit:**
Relative Häufigkeit: $h = \frac{H}{n} = \text{Zahl der 'Treffer' / Zahl der 'Chancen'}$, $h \in [0; 1]$ = [kein Treffer; nur Treffer];
 H (absolute Häufigkeit) und h gehören zur Praxis; Wahrscheinlichkeit: $P \in [0; 1]$ = [unmögliches Ereignis; sicheres E.];
Gesetz der großen Zahlen: $h \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} P$ (Brückenschlag von Praxis/Experiment zur Theorie).
 - ☐ **Zufallsgröße:** 1. Zuordnung Ergebnis/Elementarereignis zu reeller Zahl; 2. Zufallsversuch.
[Beispiele: Augenzahl beim Würfeln mit zwei 6-er Würfeln; Anzahl roter Autos (pro Zeiteinheit über Kreuzung)]
Zumeist ein Großbuchstabe, häufig X .
 - ☐ **Wahrscheinlichkeitsverteilung/Verteilung einer Zufallsgröße:**
Zuordnung eines Ereignisses einer Zufallsgröße zu genau einer Wahrscheinlichkeit.
Anschaulich: Ereignis ' $X = 3$ ' für 'genau 3 rote Autos' $\rightarrow P(X = 3)$; ggf. über Tabelle, Histogramm oder einen Term (Einsatz GTR, s.u.).
 - ☐ **Erwartungswert einer Zufallsgröße:**
Sei X Zufallsgröße mit Werten e_1, e_2, \dots, e_m und entsprechenden Wahrscheinlichkeiten $P(X = e_1), P(X = e_2), \dots, P(X = e_m)$, dann gilt für den Erwartungswert $\mu_X = E(X)$:
$$E(X) = e_1 \cdot P(X = e_1) + e_2 \cdot P(X = e_2) + \dots + e_m \cdot P(X = e_m) = \sum_{i=1}^m e_i \cdot P(X = e_i)$$
 - ☐ **Bernoulli-Formel/Binomialverteilung:**
Bei einer n -stufigen Bernoulli-Kette ist die Wahrscheinlichkeit für k 'gewünschte Ereignisse':
 $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$, $k \in [0; n]$. Diese Verteilung heißt Binomialverteilung.
Hierbei ist der Binomialkoeffizient (' n über k '; anschaulich: k aus n Kugeln ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge ziehen): $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(k-1))}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ mit $\binom{n}{0} = 1$ und der Fakultät: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1$.
GTR/WTR: Berechnung der Binomialverteilung für eine n -stufige Bernoulli-Kette:
a) $P(X = k)$: {CASIO FX-CG}: [Menu]+[A], [OPTN]+[F5], [F3], [F5], [F1], (k, n, p) | {TI-84+}: [2nd]+[VAR] = [DISTRibution] - binompdf (n, p, k) | {CASIO FX-991 DE X}: [Menu]+[7] {Verteilungsfkt.} + [4] {Binomial-Dichte} + [2] {Variable}, (k, n, p), z.B. 10, [=], 100, [=], 0,1, [=], [=]: 0,131865...;
b) $P(X \leq k)$: {CASIO FX-CG}: [Menu]+[A], [OPTN]+[F5], [F3], [F5], [F2], (k, n, p) | {TI-84+}: [2nd]+[VAR] = [DISTRibution] - binomcdf (n, p, k) | {CASIO FX-991 DE X}: [Menu]+[7] {Verteilungsfkt.} + [v]+[1] {Kumul. Binom.-V.} ... (vgl. WTR-Kurzreferenz), (k, n, p).
- Tipp: $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq (k-1))$, da k ganzzahlig und $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.
- ☞ LB S. 120 [Bernoulli-Kette & Binomialverteilung], 58+61 [Binomialkoeffizient] & FS S. 38 [Zufallsgr. u.i. Wahrsch.-V.].