

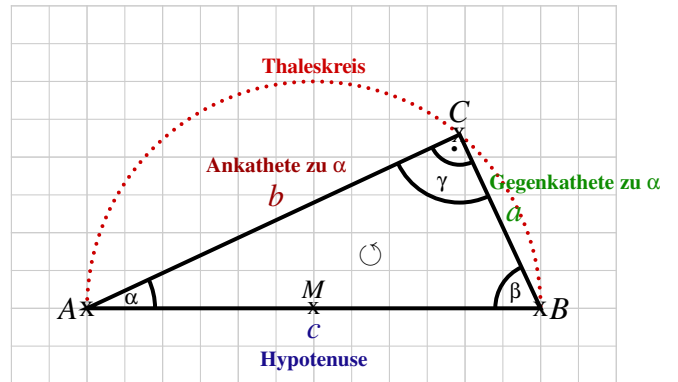
# Mathematik

## Rechtwinklige Dreiecke

0) Nomenklatur und Bild (für  $\gamma = 90^\circ$ ):

Die Seite gegenüber des rechten Winkels heißt Hypotenuse, die anderen beiden Seiten werden Katheten genannt.

- 1) a) **Satz des Pythagoras:**  $a^2 + b^2 = c^2$ , wobei  $c$  die **Hypotenuse** ist. In Worten: 'Die Summe der Kathetenquadrate ist gleich dem Hypotenusenquadrat'.
- b) Der Mittelpunkt der Hypotenuse ( $M$ ) ist das Zentrum des **Thaleskreises**, des Umkreises des rechtwinkligen Dreiecks.



2) Es gelten die folgenden **Winkelbeziehungen:**

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}};$$

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}};$$

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}.$$

$$\cos(\alpha) = \sin(90^\circ - \alpha); \quad \sin(\alpha) = \cos(90^\circ - \alpha).$$

$$(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1 \quad (\text{Satz des Pythagoras}).$$

$$\sin(0^\circ) = \cos(90^\circ) = 0; \quad \sin(30^\circ) = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}; \quad \cos(0^\circ) = \sin(90^\circ) = 1;$$

$$\tan(0^\circ) = 0; \quad \tan(30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \tan(\alpha \rightarrow 90^\circ) \rightarrow \infty;$$

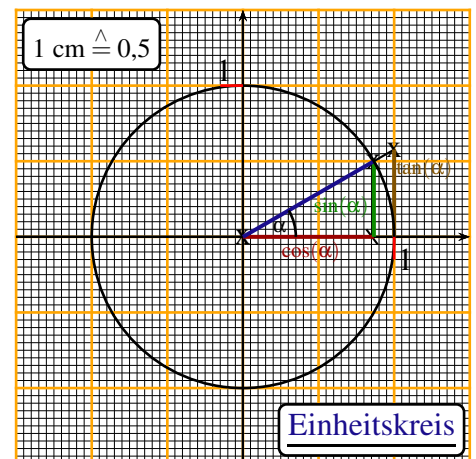
$$\cos(180^\circ) = -1; \quad \sin(180^\circ) = 0.$$

Erweiterung auf  $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$ :

$$\sin(\alpha) = \sin(180^\circ - \alpha); \quad \cos(\alpha) = -\cos(180^\circ - \alpha).$$

Umkehrfunktionen/Arkusfunktionen:  $\arcsin := \sin^{-1}$ ,  $\arccos := \cos^{-1}$ ,  $\arctan := \tan^{-1}$ .

[tri - drei; gonon - eck; metron - Maß; sinus - Bogen, Krümmung, Busen; cosinus = complementi sinus - Vervollständigung des sin, tangens - Berührende (Kreis)]



## Beliebige Dreiecke (Verallgemeinerung - inkl. Spezialfall $\gamma = 90^\circ$ )

0) Über die Konstruktion der 3 Höhen kann man jeweils das Dreieck in 2 rechtwinklige Dreiecke zerlegen (im Bild am Beispiel der Grundseite  $c$  als  $h_c$  gezeigt); Fläche:  $A_\Delta = g \cdot h_g$ .

1) (Innen-) **Winkelsumme:**  $180^\circ = \alpha + \beta + \gamma$ .

2) **Fläche** beliebiger Dreiecke:

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot c \cdot a \cdot \sin(\beta).$$

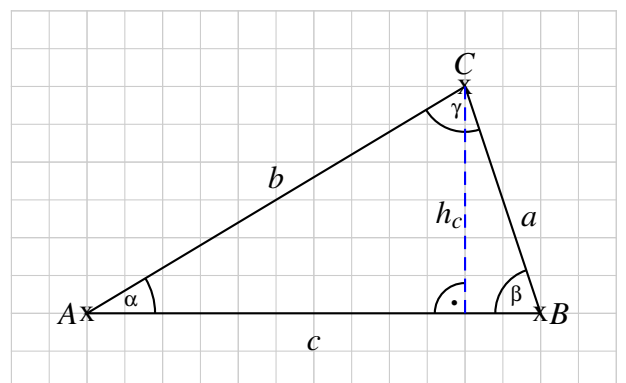
3) **Sinussatz:**  $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$ .

4) **Kosinussatz:**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha),$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2 \cdot c \cdot a \cdot \cos(\beta),$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma).$$



# Lösung der Arbeitsblätter zum Sinus-/Kosinussatz (11.09.2016)

Messung

$$\begin{aligned} \overline{CR} &\approx 11,35 \text{ cm} \hat{=} 15,589 \text{ cm} \\ \overline{CL} &\approx 13,2 \text{ cm} \hat{=} 7 \text{ cm} \\ \overline{LR} &\approx 8,8 \text{ cm} \hat{=} 12,437 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\overline{CL}_g}{\overline{CR}_g} &= \frac{\overline{CL}}{\overline{CR}} \\ \Rightarrow \overline{CL} &\approx 18,135 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda &\approx 58^\circ \hat{=} 57^\circ \\ \gamma &\approx 41^\circ \hat{=} 42^\circ \\ \varphi &\approx 80^\circ \hat{=} 81^\circ \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{AB 1} \\ \text{AB 2} \end{array} \right\}$$

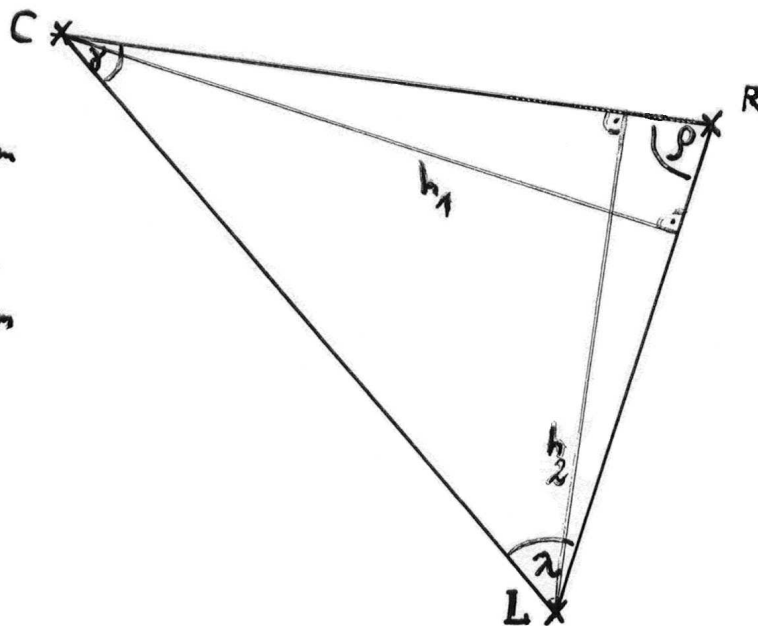
AB 1

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \sin(p) &= \frac{h_1}{\overline{CR}} \\ \sin(\lambda) &= \frac{h_1}{\overline{CL}} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} h_1 &= \sin(p) \cdot \overline{CR} \stackrel{\textcircled{a}}{=} \sin(\lambda) \cdot \overline{CL} \\ \Rightarrow \overline{CL} &= \frac{\sin(p)}{\sin(\lambda)} \cdot \overline{CR} \approx 18,102 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \sin(\gamma) &= \frac{h_2}{\overline{LR}} \\ \sin(\varphi) &= \frac{h_2}{\overline{CL}} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} h_2 &= \sin(\gamma) \cdot \overline{LR} \stackrel{\textcircled{a}}{=} \sin(\varphi) \cdot \overline{CL} \\ \Rightarrow \overline{CL} &= \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\varphi)} \cdot \overline{LR} \approx 18,669 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(p)}{\overline{CL}} \stackrel{\textcircled{a}}{=} \frac{\sin(\lambda)}{\overline{CR}} \stackrel{\textcircled{a}}{=} \frac{\sin(\gamma)}{\overline{LR}}$$

Sinussatz



AB 2

$$\begin{aligned} x^2 &\stackrel{\textcircled{1}}{=} s^2 + h_1^2 \\ \overline{CR} &\stackrel{\textcircled{2}}{=} s + t \\ \sin(p) &\stackrel{\textcircled{3}}{=} \frac{h_1}{\overline{LR}} \\ \cos(p) &\stackrel{\textcircled{4}}{=} \frac{t}{\overline{LR}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 &\stackrel{\textcircled{1}}{=} s^2 + h_1^2 \\ &\stackrel{\textcircled{2}}{=} h_1^2 + (\overline{CR} - t)^2 \stackrel{\text{BF}}{=} h_1^2 + \overline{CR}^2 - 2 \cdot \overline{CR} \cdot t + t^2 \\ &\stackrel{\textcircled{3} \cdot \textcircled{4}}{=} \overline{LR}^2 \cdot \underbrace{(\sin(p))^2 + (\cos(p))^2}_{=1} + \overline{CR}^2 - 2 \cdot \overline{CR} \cdot \overline{LR} \cdot \cos(p) \\ &= \overline{LR}^2 \cdot [(\sin(p))^2 + (\cos(p))^2] + \overline{CR}^2 - 2 \cdot \overline{CR} \cdot \overline{LR} \cdot \cos(p) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overline{CL}^2 = \overline{LR}^2 + \overline{CR}^2 - 2 \cdot \overline{CR} \cdot \overline{LR} \cdot \cos(p)$$

Kosinussatz

