Mathematik

Erinnerung an Fachbegriffe

Addition:	'1. Summand' + '2. Summand'	=	Summe
Subtraktion:	Minuend − Subtrahend	=	Differenz
Multiplikation:	'1. Faktor' · '2. Faktor'	=	Produkt
Division:	Dividend / Divisor	=	Quotient
	$\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$	=	Bruch [$\mathbb{Q}$: Menge der rationalen Zahlen, d.h. alle Brüche]
Potenz:	$\text{Basis}^{\text{Exponent}} = \text{Grundzahl}^{\text{Hochzahl}}$	=	Wert der Potenz
Wurzel:	$\sqrt[\text{Wurzelexponent}]{\text{Radikant}}$	|	Koeffizient: Bei-/Vorzahl (Faktor vor Variablen/Basisvektor)

Bei Vorzeichen | Vorzeichen der Punktrechnung sowie bei Operationszeichen | Vorzeichen (d.h. Strichrechnung) gilt:
'+' | '+' / '−' | '−' = '+' &
'+' | '−' / '−' | '+' = '−'

Zahlenmengen: Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$,
Rationale Zahlen: $\mathbb{Q} = \{x = \frac{m}{n};\ m,\ n \in \mathbb{Z}\}$, Reelle Zahlen: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, mit $\mathbb{I}$: irrationale Zahl, z.B. $\sqrt{2}, \pi, e$ – unendlich viele Nachkommastellen ohne Periodizität bzw. 'Muster'; $\mathbb{R}$ ist bis zum Abitur Standard und maximaler Zahlenraum;

(*Erst im Studium*): Komplexe Zahlen: $\mathbb{C} = \{z = x + i \cdot y:\ \ x, y \in \mathbb{R},\ \ i^2 := -1$ (genannt: 'imaginäre Einheit'; in Elektrotechnik auch j)$\}$

Schreibweise von (abgeschlossenem bzw. offenem) Intervall und Relation: $x \in [a;b] \equiv a \leq x \leq b$ bzw. $x \in]a;b[\equiv a < x < b$

Gesetze und Formeln

Festgelegte Reihenfolge: Ausdrücke innerhalb von Klammern ['(...)'] vor Potenzen ['...^{x}'] vor Punktrechnung ['·' und ':' bzw. '$\frac{\ldots}{\ldots}$'] vor Strichrechnung ['+' und '−']

Kommutativgesetz (Vertauschung; **KG**): $a + b = b + a$; $\quad a \cdot b = b \cdot a$;

!Achtung! $a - b = a + (-b) = (-b) + a = -b + a$; $\quad a : b = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{b} \cdot a$

Assoziativgesetz (Verbindung; **AG**): $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$; $\quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$

Distributivgesetz (Verteilen; **DG**): $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) = a \cdot b + a \cdot c$

Bruchrechnung ('0' nie als Nenner bzw. zum Erweitern/Kürzen):

Reziproke Zahlen (Kehrwert): $n, \frac{1}{n}$; $\frac{a}{b}, \frac{b}{a}$; $\quad n \cdot \frac{1}{n} = 1,\ \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$

Über-Kreuz-Multiplikation: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$

Erweitern / Kürzen ($z \neq 0$): $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot z}{b \cdot z}$ $\quad \frac{a}{b} = \frac{a:z}{b:z}$

Addition / Subtraktion (Hauptnenner): $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$ $\quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}$

Multiplikation / Division: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ $\quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

Binomische Formeln [1.; 2.; 3. **BF**]: $(a + b)^2 = a^2 + 2\,a \cdot b + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2\,a \cdot b + b^2$; $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

***p*-*q*-Formel** (bei $x^2 + p \cdot x + q = 0$): $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$; Satz von Vieta: $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$

➟ http://www.youtube.com/watch?v=tRblwTsX6hQ [**Mathe-Song**: DorFuchs – "*p-q-Formel* (*Die Lösungsformel*)" ☺]

Potenz-Definitionen: $x^0 = 1\ (x \neq 0)$; $\quad x^1 = x$; $\quad x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ Faktore}}$; $\quad x^{-n} = \frac{1}{x^n}\ (x \neq 0)$

Potenzsätze:

$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$, $\quad x^m : x^n = x^{m-n}$,

$x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$, $\quad x^n : y^n = \frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n = (x : y)^n$,

$(x^m)^n = x^{m \cdot n} = (x^n)^m$

Wurzeln:

$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$; $\quad x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$; $\quad x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$.

$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$, $\quad \sqrt[n]{x} : \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$,

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}$

Logarithmen:

$\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$ $\quad \lg(x) := \log_{10}(x)$; $\quad \ln(x) := \log_e(x)$

$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$ $\quad \log_a(b^c) = c \cdot \log_a(b)$

Definition von Funktion, Umkehrfunktion und Wurzeln

1) Eine Funktion $f(x)$ ordnet einem Element der Definitions- ($\mathbb{D}$) genau ein Element der Zielmenge / Wertemenge [-bereich/-vorrat] ($\mathbb{W}$) zu: $x \xrightarrow{f(x)} y$; $x \in \mathbb{D}_f$; $y \in \mathbb{W}_f$.

2) Eine Funktion $f(x)$ heißt Umkehrfunktion von $g(y)$, wenn $f(g(y)) = y$ gilt – und somit: $y \underset{f(x)}{\overset{g(y)}{\rightleftarrows}} x$.

Man schreibt: $g^{-1}(x) := f(x)$ und entsprechend $f^{-1}(y) := g(y)$.

[Umkehrbar: Jedes Element der Wertemenge wurde genau von einem Element der Definitionsmenge zugeordnet.]

Vorsicht: $g^{-1}(x) \neq \frac{1}{g(y)} = (g(y))^{-1}$. [Dies wird leider nicht sauber voneinander getrennt!!!]

✌ ➟ http://www.youtube.com/watch?v=H7g67oOwqVY [Mathe-Song: Mathekaiser – "*Umkehrsong*" ☺]

3) Die n-te Wurzel $f(x) = \sqrt[n]{x}$ ist die Umkehrfunktion von der n-ten Potenz $g(y) = y^n$:

$\sqrt[n]{x^n} = (x^n)^{\frac{1}{n}} = x^{\left(n \cdot \frac{1}{n}\right)} = x^1 = x = x^{\left(\frac{1}{n} \cdot n\right)} = (\sqrt[n]{x})^n$, wobei $n \neq 0$, $x > 0$.

Vorsicht: Der Radikant darf nicht negativ sein, sonst ist die Wurzel bzw. die entsprechende Potenz in $\mathbb{R}$ nicht definiert!

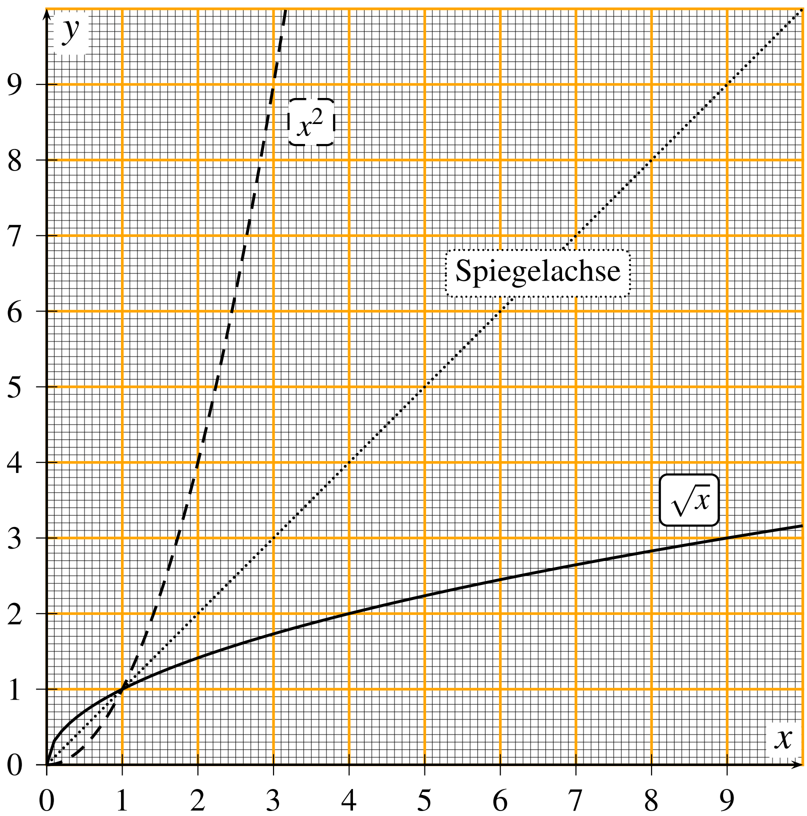
Dies kann man sehr leicht sehen, z.B. am folgenden Beispiel:

$-2 \overset{?}{=} \sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$ ↯.

Satz: $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, $n \neq 0$, $q \neq 0$, $x > 0$: $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[q]{x^p}$.

Mit Einschränkung auf positive Radikanten gelten die bekannten Potenzgesetze auch für Wurzeln!

4) Graphischer Zusammenhang von quadratischer Wurzelfunktion und Parabel:



Kartesisches Koordinatensystem:
orthogonales System $[P = (x_P|y_P)]$

Abszisse: x-Wert bzw. x-/Quer-Achse;

Ordinate: y-Wert bzw. y-/Hoch-Achse;

Die vier Quadrante:

1. Quadrant: $x > 0 \wedge y > 0$,
2. Quadrant: $x < 0 \wedge y > 0$,
3. Quadrant: $x < 0 \wedge y < 0$,
4. Quadrant: $x > 0 \wedge y < 0$,

Koordinatenursprung/Nullpunkt: $(0|0)$.

Graph von f: $\mathbb{G}_f = \{(x|f(x)) : x \in \mathbb{D}_f\}$.

Spezielle Punkte bei der Kurvendiskussion:

Schnittpunkt mit der y-Achse:
$S_y = (0|f(0))$;

n-te Nullstelle/Schnittpunkt mit der x-Achse:
$N_n \equiv \mathrm{NS}_n \equiv S_{x,n} = (x_{\mathrm{NS},n}|0)$;

n-ter Scheitelpunkt/Extrempunkt/Fußpunkt:
$S_n \equiv \mathrm{XP}_n = (x_{\mathrm{XP},n}|\,f(x_{\mathrm{XP},n}))$ – Parabel:

i) $a > 0$: $S_n \to T_n \equiv \mathrm{TP}_n$ [Tiefpunkt],

ii) $a < 0$: $S_n \to H_n \equiv \mathrm{HP}_n$ [Hochpunkt];

[ab kubischer Funktion – x^3: n-ter Wendepunkt: WP_n].

5) Formen der quadratischen Funktion (ganzrationale Funktion 2. Grades / Parabel):

$f(x) = \underbrace{a \cdot x^2}_{\text{quadratisches Glied}} + \underbrace{b \cdot x}_{\text{lineares Glied}} + \underbrace{c}_{\text{konstantes Glied}}$ (allgemeine Form; **AF**) [bei $a = +1$: Normalparabel]

$f(x) = a \cdot (x + d)^2 + e$ (Scheitelpunktform; **SF**)

$\Rightarrow S = (-d|e) = \left(-\frac{b}{2a} \,\middle|\, -\frac{b^2 - 4a \cdot c}{4a}\right)$ (Scheitelpunkt)

$f(x) = a \cdot (x - x_{\mathrm{NS},1}) \cdot (x - x_{\mathrm{NS},2})$ (faktorisierte Form; **FF**)

$\Rightarrow \mathrm{NS}_1 = (x_{\mathrm{NS},1}|0)$, $\mathrm{NS}_2 = (x_{\mathrm{NS},2}|0)$