Mathematik

Umformung der quadratischen Funktion von allgemeiner Form in Scheitelpunktform:

$f(x) = \underbrace{a \cdot x^2}_{\text{quadratisches Glied}} + \underbrace{b \cdot x}_{\text{lineares Glied}} + \underbrace{c}_{\text{konstantes Glied}}$ (allgemeine Form [AF]) [bei $a = +1$: Normalparabel]

$f(x) = a \cdot (x-d)^2 + e$ (Scheitelpunktform [SF])

$\Rightarrow S \equiv XP = (d|e) = \left(-\frac{b}{2 \cdot a} \middle| -\frac{b^2-4\cdot a\cdot c}{4\cdot a}\right)$

(Scheitelpunkt bzw. Extrempunkt: Hoch-/Tiefpunkt [HP/TP])

$f(x) = a \cdot (x - x_{NS,1}) \cdot (x - x_{NS,2})$ (faktorisierte Form [FF])

$\Rightarrow \quad NS_1 = (x_{NS,1}|0), \quad NS_2 = (x_{NS,2}|0)$

Beispiel der Scheitelpunktbestimmung mit quadratischer Ergänzung:

$f(x) = \frac{2}{3} \cdot x^2 - \frac{4}{15} \cdot x - \frac{3}{75}$

$= \frac{2}{3} \cdot \left(x^2 - \frac{2}{5} \cdot x\right) - \frac{3}{75}$ | quadratische Ergänzung

$= \frac{2}{3} \cdot \left(\left[x^2 - \frac{2}{5} \cdot x + \left(\frac{1}{5}\right)^2\right] - \left(\frac{1}{5}\right)^2\right) - \frac{3}{75}$

$\overset{2.BF}{=} \frac{2}{3} \cdot \left(\left[\left(x - \frac{1}{5}\right)^2\right] - \left(\frac{1}{5}\right)^2\right) - \frac{3}{75}$

$= \frac{2}{3} \cdot \left(x - \frac{1}{5}\right)^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{25} - \frac{3}{75}$

$= \frac{2}{3} \cdot \left(x - \frac{1}{5}\right)^2 - \frac{5}{75}$

$\Rightarrow S = (d|e) = \left(\frac{1}{5} \middle| -\frac{5}{75}\right)$ (Scheitelpunkt)

Probe mit obiger Formel:

$d = -\frac{b}{2\cdot a} = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{4}{15}\right) / \frac{2}{3}$

$= \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{5}$ ✓

$e = -\frac{b^2-4\cdot a\cdot c}{4\cdot a}$

$= -\left(\left(-\frac{4}{15}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{75}\right)\right) \Big/ \left(4 \cdot \frac{2}{3}\right)$

$= -\left(\frac{16}{(3\cdot 5)^2} + \frac{8}{75}\right) \Big/ \left(\frac{8}{3}\right)$

$= -\left(\frac{16}{3\cdot 3\cdot 25} + \frac{8}{75}\right) \cdot \left(\frac{3}{8}\right)$

$= -\left(\frac{16\cdot 3}{3\cdot 3\cdot 25\cdot 8} + \frac{8\cdot 3}{75\cdot 8}\right) = -\left(\frac{2}{75} + \frac{3}{75}\right)$

$= -\frac{5}{75}$ ✓

Geometrische Eigenschaft von Parabeln:

Alle Parabeln sind achsensymmetrisch zur Geraden $x = x_{SP} = x_{NS_1} + \frac{x_{NS_2} - x_{NS_1}}{2}$ (NS_i: eine der max. 2 Nullstellen; SP: Scheitelpunkt).

Allgemein gilt für Symmetrieeigenschaften:

1.) $f(-x) = f(x)$: Achsensymmetrie zur y-Achse (nur gerade Potenzen von x, z.B.: $f(x) = 2 \cdot x^2 + 3$);

2.) $f(-x) = -f(x)$: Punktsymmetrie zum Ursprung $(0|0)$ (nur ungerade Potenzen von x, z.B.: $f(x) = 2 \cdot x^3 + 5 \cdot x$).

Die p-q-Formel:

$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ (allgemeine Form) $|: a$ ($a \neq 0 \Leftrightarrow \text{Grad}(f) = 2$)

$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0$ (Normalform)

$\boxed{x^2 + p \cdot x + q = 0}$ (Ausgangsbedingung für p-q-Formel)

$\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$; $\mathbb{L} \begin{cases} \text{2 Lösungen: } (p/2)^2 > q & [D > 0] \\ \text{1 Lösung: } (p/2)^2 = q & [D = 0] \\ \text{0 Lösungen: } (p/2)^2 < q & [D < 0] \end{cases}$

Mit Diskriminante $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ {bzw. $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$} (d.h. der Rechenausdruck unter der Wurzel lässt Aussagen über Zahl und Art der Lösungen einer algebraischen Gleichung zu) und der schnell zu überprüfenden Fallunterscheidung.

Satz von Vieta:

[siehe Formelsammlung]

x_1 und x_2 sind genau dann Lösungen von $x^2 + p \cdot x + q$, wenn gilt: $\boxed{x_1 + x_2 = -p \text{ und } x_1 \cdot x_2 = q}$.

Übungsaufgaben (1. Teil):

1) Bestimme die Lösungsmenge:
a) $4 \cdot z^2 + 28 \cdot z + 200 = 0$, b) $\frac{4}{9} \cdot x^2 - 3 \cdot x + \frac{5}{2} = 0$.

2) Gebe die quadratische Gleichung zu den folgenden Lösungsmengen an:
a) $\mathbb{L} = \{3; 7\}$; b) $\mathbb{L} = \{6; -3\}$; c) $\mathbb{L} = \{-2\}$.

3) Verifiziere die folgenden Lösungen:
a) $x^2 + 12 \cdot x - 27 = 0$; $\mathbb{L} = \{-3; -9\}$;
b) $x^2 - 8 \cdot x + 15 = 0$; $\mathbb{L} = \{-5; 3\}$.

Faktorisierung/Nullstellenbestimmung über S.v.V.:

$f(x) = x^2 \underbrace{-11}_{\Rightarrow \Sigma = +11} \cdot x \underbrace{+18}$

$\Rightarrow +|+$ oder $-|-$

$\rightarrow 1 \cdot 18;\ 2 \cdot 9;\ 3 \cdot 6$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{+2; +9\}$

$\Rightarrow f(x) = (x-2) \cdot (x-9)$

$= (x - x_{NS_1}) \cdot (x - x_{NS_2})$

[Dies kann auch zur Termvereinfachung nützlich sein, da man ggf. nach schneller Faktorisierung mit Hilfe des Satzes von Vieta kürzen kann.]

Substitution bei biquadratischen Gleichungen:

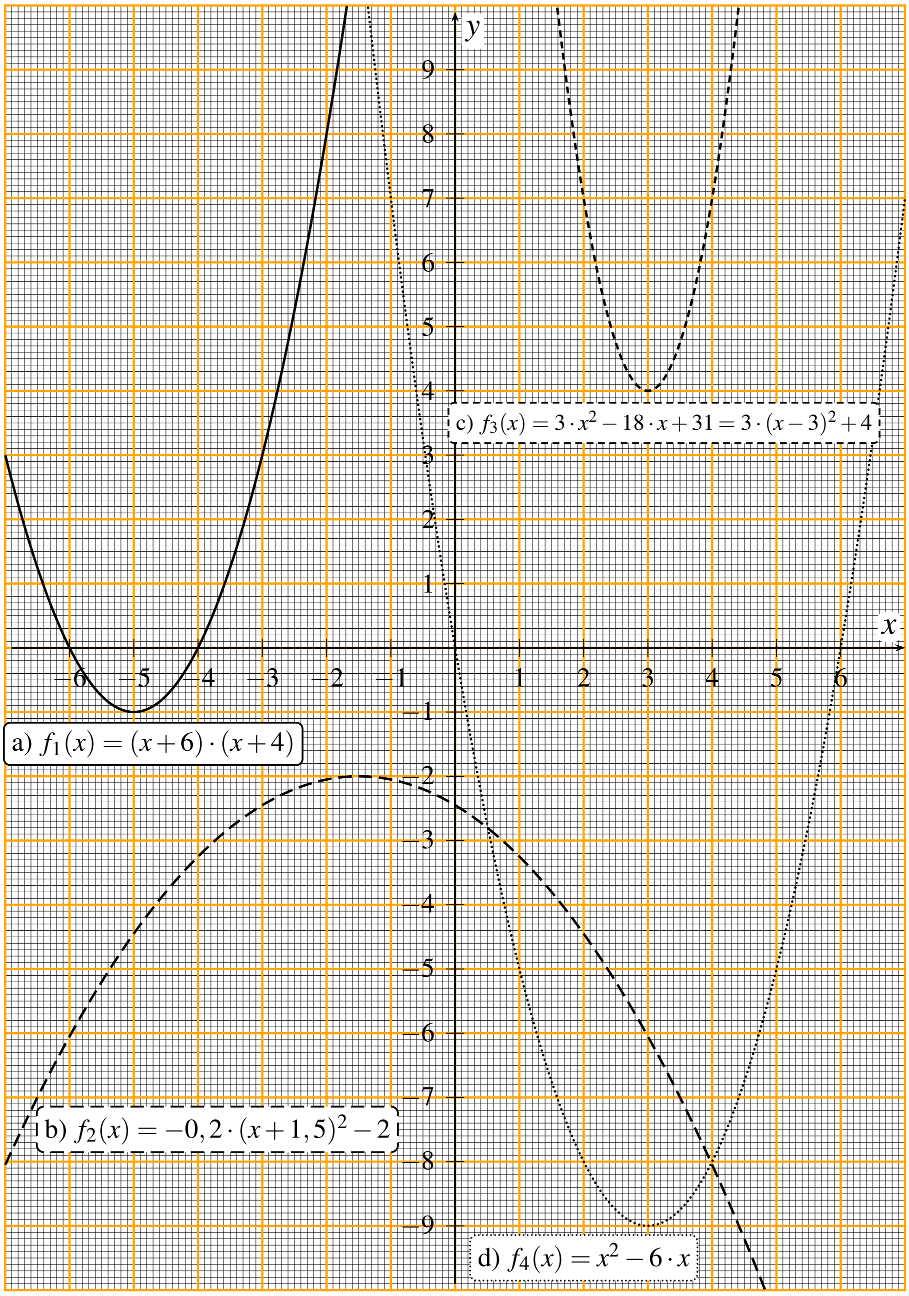
$z^4 - 13 \cdot z^2 + 36 = 0$ | Substitution: $z^2 = x$

$x^2 - 13 \cdot x + 36 = 0$ | p-q-Formel / Faktorisierung über S.v.V.

$\mathbb{L}_x = \{4;\ 9\}$; mit $z_{1,2} = \pm\sqrt{x_1}$ und $z_{3,4} = \pm\sqrt{x_2}$ folgt:

$\mathbb{L}_z = \{-2;\ 2;\ -3;\ 3\}$.

Beispiele für Graphen quadratischer Funktionen:



Tipps – Skizzieren/Vorstellen einer Parabel:

☞ 3 – 5 markante Punkte einzeichnen und Graphen durch diese Punkte ziehen – dabei ist auf Achsensymmetrie und Parabelform zu achten.

☞ Jede Parabel hat einen Scheitelpunkt (SP = Extremum) (aus Scheitelpunktform bzw. über Nullstellen zu erschließen).

☞ Zumeist kann im Kopf leicht $f(x_{\text{SP}}+1)$ und $f(x_{\text{SP}}-1)$ (oder andere Werte) ausgerechnet werden ...

☞ Ggf. (bei faktorisierte Form) sind Nullstellen ablesbar [Schnittpunkte mit x-Achse: $(x|0)_{f(x)=0}$]: Anzahl: 2, 1, oder 0 möglich; wenn genau eine existiert, dann ist sie gleichzeitig Scheitelpunkt.

☞ Schnittpunkt mit der y-Achse bei $(0\,|\,f(0))$.

☞ Vorfaktor des quadratischen Gliedes (a) beachten:
$a > 0$: nach oben offen (SP/XP ist dann Minimum/TP),
$a < 0$: nach unten offen (SP/XP ist dann Maximum/HP),
$|a| > 1$: Parabel im Vergleich zur Normalparabel entlang y-Achse gestreckt,
$|a| < 1$: Parabel im Vergleich zur Normalparabel entlang y-Achse gestaucht,
$|a| = 1$: Normalparabel,
$a = 0$: quadratisches Glied verschwindet (d.h. Gerade).

Übungsaufgaben (2. Teil):

4) Berechne die Nullstellen algebraisch:
a) $f_1(x) = x^2 - 2\cdot x - 15$,
b) $f_2(x) = x^2 + 12\cdot x + 35$,
c) $f_3(x) = x^2 - \frac{6}{5}\cdot x - \frac{8}{5}$,
d) $f_4(x) = z^4 - 9\cdot z^2$,
e) $f_5(x) = z^4 + 10\cdot z^2 + 9$.

5) Stelle die i) Scheitelpunktform/ii) faktorierte Form (soweit möglich bzw. sinnvoll)/iii) allgemeine Form der obigen Parabel-Graphen a – d) auf.

6) Skizziere die Funktion $f(x) = x^2 - 9$ und bestimme den Scheitelpunkt und die Nullstellen algebraisch.

7) [*ab Klassenstufe* 10_{G8}] Leite alle Funktionen $2\times$ ab. Was ergibt sich generell, wenn ich eine Funktion n-ten Grades $n+1$-mal ableite?