

Astronomie

Schwarzkörper-Strahlung

Definition:

Als Schwarzkörper-Strahlung (BBR: 'black-body radiation' oder Hohlraumstrahlung) wird das von einem absoluten schwarzen Strahler, der alle Wellenlängen absorbiert und emittiert, ausgesandte Spektrum bezeichnet (Strahlungsfeld im thermodynamischen Gleichgewicht).

Nach dem Kirchhoffschen Satz (1859) erhält man das Spektrum eines beliebigen Temperaturstrahlers, gegeben durch das spektrale Emissionsvermögen j_λ , als Produkt von spektraler Strahldichte des schwarzen Strahlers der Temperatur T (bzw. spektraler Verteilung der Intensität von Hohlraumstrahlung pro Raumwinkel) $B_\lambda(\lambda, T)$ und dem spektralen Absorptionsvermögen des jeweiligen Temperaturstrahlers κ_λ : $j_\lambda = B_\lambda(\lambda, T) \cdot \kappa_\lambda$, d.h. der Schwarzkörper ist der ideale Temperaturstrahler mit maximalem Emissionsvermögen. Man kann einen schwarzen Strahler praktisch realisieren, indem man ein Rohr (als Hohlraum) mit einem Metalloxid schwärzt und mit mehreren Blenden versieht; Gestalt und Material des Hohlraums beeinflussen dabei nicht das Spektrum.

Wichtige Formeln zur Schwarzkörper-Strahlung:

Rayleigh-Jeans-Näherung ($\frac{hc}{\lambda kT} = \frac{h\nu}{kT} \ll 1$): $B_\lambda(\lambda, T) \approx \frac{2 \cdot c}{\lambda^4} \cdot k \cdot T$, $B_\nu(\nu, T) \approx \frac{2 \cdot \nu^2}{c^2} \cdot k \cdot T$.

Wiensche Näherung ($\frac{hc}{\lambda kT} = \frac{h\nu}{kT} \gg 1$): $B_\lambda(\lambda, T) = \frac{2 \cdot h \cdot c^2}{\lambda^5} \cdot e^{-\frac{hc}{\lambda kT}}$, $B_\nu(\nu, T) = \frac{2 \cdot h \cdot \nu^3}{c^2} \cdot e^{-\frac{h\nu}{kT}}$.

Die Plancksche Strahlungsformel (1900) lautet:

$$B_\lambda(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \left[e^{hc/\lambda kT} - 1 \right]^{-1} = -B_\nu(\nu, T) \frac{d\nu}{d\lambda}, \quad B_\nu(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left[e^{h\nu/kT} - 1 \right]^{-1}.$$

Wiensches Verschiebungsgesetz: $\lambda_m \cdot T = b = \frac{hc}{5 \cdot k} \approx 2,877\,555 \text{ mm} \cdot \text{K}$.

Für die Strahlungsdichte gilt: $u_\lambda(\lambda, T) = \frac{4 \cdot \pi}{c} \cdot B_\lambda(\lambda, T)$, Energiedichte der Photonen: $u(T) = \int_0^\infty u_\lambda(\lambda, T) d\lambda$.
 $\Rightarrow u(2,73 \text{ K}) \approx 4,2 \cdot 10^{-14} \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$, $\rho_{\text{CMB}} = \frac{u}{c^2} \approx 4,68 \cdot 10^{-34} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

Das Stefan-Boltzmann-Gesetz liefert die Flächenhelligkeit:

$$F = \int_{\Omega/4}^\infty \int_0^\infty B_\lambda(\lambda, T) d\lambda d\Omega = \frac{c}{4} \cdot \int_0^\infty u_\lambda(\lambda, T) d\lambda = \frac{c}{4} \cdot u(T) = \sigma \cdot T^4 \text{ mit der Stefan-Boltzmann-Konstanten}$$

$$\sigma = \frac{2 \cdot \pi^5 \cdot k^4}{15 \cdot c^2 \cdot h^3} = \frac{\pi^2 \cdot k^4}{60 \cdot c^2 \cdot \hbar^3} \approx 5,670\,367 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}.$$

Spektrale Anzahldichte der Photonen: $N_\lambda = \frac{\lambda}{h \cdot c} \cdot u_\lambda(\lambda, T) = \frac{8 \cdot \pi}{\lambda^4} \cdot \left[e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1 \right]^{-1}$.

Anzahldichte der Photonen: $N \approx 60,422 \cdot \left(\frac{k \cdot T}{h \cdot c} \right)^3 \approx 20,28 \frac{\text{Photonen}}{\text{cm}^3 \cdot \text{K}^3} \cdot T^3$.

$\Rightarrow N(2,73 \text{ K}) \approx 410 \frac{\text{Photonen}}{\text{cm}^3}$ (für Kosmische Mikrowellen-Hintergrundstrahlung, CMB: 'cosmic microwave background', $T_{\text{CMB}} = 2,7255(6) \text{ K}$)

[Mikrowellen (aus FIR- und Radio-Bereich): $(3 \cdot 10^{-4} - 0,3) \text{ m} \hat{\approx} (10^{12} - 10^9) \text{ Hz} \hat{\approx} (4 \cdot 10^{-3} - 4 \cdot 10^{-6}) \text{ eV}$].

Definition der Schwarzkörper-Temperatur $T_S(\lambda)$: $u_\lambda = \frac{8 \cdot \pi \cdot h \cdot c}{\lambda^5} \left[e^{\frac{hc}{\lambda \cdot k \cdot T_S(\lambda)}} - 1 \right]^{-1}$.

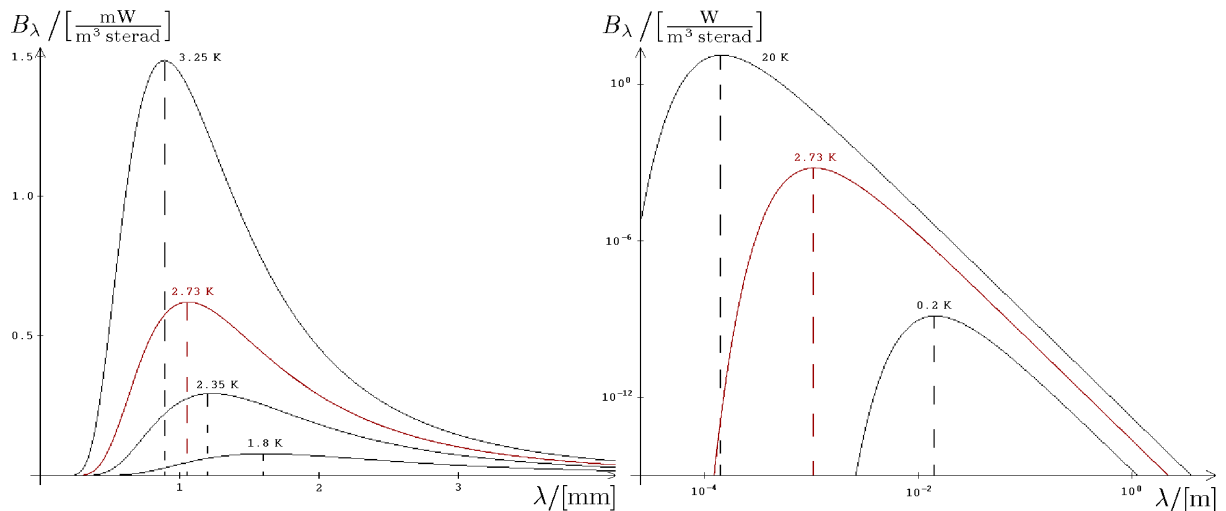
Definition der Antennen-Temperatur $T_A(\lambda)$: $u_\lambda = \frac{8 \cdot \pi}{\lambda^4} \cdot k \cdot T_A(\lambda)$.

Für beliebige Zeitpunkte t_1, t_2 gelte: $R_2/R_1 = f \equiv konst.$ (R : Skalierungsfaktor der Metrik (Krümmungsradius), vgl. Zusammenfassung 'Kosmologie').

$$\begin{aligned} \Rightarrow u_\lambda(t_2) d\lambda_2 &= \frac{u_\lambda(t_1)}{f^4} d\lambda_1 = \frac{8 \cdot \pi \cdot h \cdot c}{\lambda_1^5 \cdot f^4} \cdot \left[e^{\frac{hc}{\lambda_1 \cdot k \cdot T_1}} - 1 \right]^{-1} d\lambda_1 = \frac{8 \cdot \pi \cdot h \cdot c}{\lambda_2^5} \cdot \left[e^{\frac{hc \cdot f}{\lambda_2 \cdot k \cdot T_1}} - 1 \right]^{-1} f d\lambda_1 = \\ &= \frac{8 \pi h c}{\lambda_2^5} \left[e^{hc/\lambda_2 k T_2} - 1 \right]^{-1} d\lambda_2. \end{aligned}$$

\Rightarrow Für frei expandierende Schwarzkörper-Strahlung bleibt die Planck-Formel mit veränderter Temperatur $T_2 = T_1/f$ gültig, d.h. in Übereinstimmung mit dem Stefan-Boltzmann-Gesetz gilt: $T \propto R^{-1} \propto e^{1/4}$.

Hier zwei Graphen (rechts: log-log-Plot) des Intensitätsverlaufs schwarzer Strahler verschiedener Temperatur mit der Wellenlänge; größte Intensität bei jeweils eingezeichnetem λ_m :



$T/[K]$	$\lambda_m/[m]$	$B_{\lambda_m} / \left[\frac{W}{m^3 sr} \right]$
20,00	$1,439 \cdot 10^{-4}$	13,016
3,25	$8,854 \cdot 10^{-4}$	$1,475 \cdot 10^{-3}$
<u>2,73</u>	<u>$1,054 \cdot 10^{-3}$</u>	<u>$6,168 \cdot 10^{-4}$</u>
2,35	$1,224 \cdot 10^{-3}$	$2,915 \cdot 10^{-4}$
1,80	$1,599 \cdot 10^{-3}$	$7,686 \cdot 10^{-5}$
0,20	$1,439 \cdot 10^{-2}$	$1,302 \cdot 10^{-9}$

Strahlungstransportgleichung:

Für das Szenario einer Quelle mit Intensität $I_{v,0}$ und vorgelagertem Gas, das gemäß seines Absorptionskoeffizienten κ_v (Einheit: m^{-1}) bzw. Massenabsorptionskoeffizienten $\kappa_{v,M} = \kappa_v/\rho$ (Einheit: $\frac{m^2}{kg}$) emittiert und absorbiert wird (vgl. Astronomie-Einführung), gilt:

$$\begin{aligned} \frac{dI_v}{d\tau_v} &= -I_v + S_v \text{ mit } \tau_v = \int_0^r \kappa_v dr, S_v = \frac{j_v}{\kappa_v}: \text{'source function' (des vorgelagerten Gases)} \\ \Rightarrow I_v &= I_{v,0} \cdot e^{-\tau_v} + S_v \cdot (1 - e^{-\tau_v}). \end{aligned}$$

Fallunterscheidung nach der optischen Tiefe τ_v ($\tau_v = 1$ bedeutet Intensitätsschwächung um den Faktor $1/e$):

i) $\tau_v \gg 1$ (optisch dick, opaque):

$$I_v = S_v \stackrel{\tau_v \rightarrow \infty}{=} B_v(\nu, T) \text{ (keine Linien des Gases sichtbar);}$$

ii) $\tau_v \ll 1$ (optisch dünn, transparent):

$$I_v = I_{v,0} - \tau_v \cdot (I_{v,0} - S_v):$$

a) $I_{v,0} > S_v$: Linien des vor der Quelle $I_{v,0}$ gelagerten Gases ($\Rightarrow \kappa_v$) in Absorption;

b) $I_{v,0} < S_v$: Linien des vor der Quelle $I_{v,0}$ gelagerten Gases ($\Rightarrow \kappa_v$) in Emission.